AJ-1210

B.A./B.Sc. (Part–III) Term End Examination, 2021-22

MATHEMATICS (Paper-II)

Time : 3 hours] **[Maximum Marks : 50**

नोट- *प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Note : *Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.*

इकाई–I / Unit–I

1. (a) दर्शाइये कि एक चक्रीय समूह के स्वाकारिताओं का समूह आबेली होता है।

Show that the group of automorphism of a cyclic group is abelian.

(b) यदि $a \in G$, जहाँ G एक समूह है, तब G का वर्ग समीकरण ज्ञात कीजिए।

If $a \in G$, where G is a group, then find class equation of G.

(c) संरचना प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove structure theorem.

इकाई–II / Unit–II

2. (a) माना R एक यूक्लिडीय वलय है तथा $a, b \in R$। यदि $b \neq 0, R$ में एक इकाई है, तब दर्शाइये कि $d(ab) = d(a)$

Let R be a Euclide an ring and $a, b \in R$. If $b \neq 0$ is a unit in R, then show that $d(ab) = d(a)$.

(b) यदि R एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त हो, तो सिद्ध कीजिए कि $R[x]$ भी एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त है।

If R is a unique factorization domain, then prove that $R[x]$ is also a unique factorization domain.

(c) मॉड्यूल के समाकारिता पर मूल प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Fundamental Theorem on Homomorphism of Modules.

इकाई–III / Unit–III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सभी बहुपदों का समुच्चय एक सदिश समष्टि होता है।

Prove that the set of all polynomials over the field of real numbers is a vector space.

(b) सदिश समष्टि के लिए विस्तार प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove extension theorem for vector spaces.

(c) यदि W_1 तथा W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If W_1 and W_2 are any two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

[P.T.O.]

इकाई–IV / Unit–IV

4. (a) प्रतिचित्रण $f:V_2(R) \to V_2(R)$, जो $f(x, y) = (x^3, y^3)$ द्वारा परिभाषित है, की रैखिकता की जाँच कीजिए।

Test linarity of the mapping $f:V_2(R) \to V_2(R)$, which is defined by $f(x, y) = (x^3, y^3)$.

(b) यदि f तथा g किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ पर दो द्वि-एकघाती समघात हों तो सिद्ध कीजिए कि $f + g$ भी $V(F)$ पर एक द्वि-एकघाती समघात है।

If f and g are two bilinear forms on a finite dimensional vector space, then prove that $f + g$ is also a bilinear form over $V(F)$.

(c) निम्न द्विघाती समघात को विहित रूप में समानयन कर उसकी जाति, सूचकांक एवं चिह्निका ज्ञात कीजिए–

$q = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1 + 12x_1x_2$

Reducing following quadratic form into canonical form find its rank, index and signature :

$q = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1 + 12x_1x_2$

इकाई–V / Unit–V

5. (a) यदि α, β एक आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं, तब सिद्ध कीजिए कि–

$$||\alpha + \beta|| \le ||\alpha|| + ||\beta||$$

If α, β are vectors of an inner product space $V(F)$, then prove that

$$||\alpha + \beta|| \le ||\alpha|| + ||\beta||$$

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में शून्येत्तर सदिशों का लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

Prove that the orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space $V(F)$ is linearly independent.

(c) $V_4(R)$ के निम्न एकघाततः स्वतंत्र समुच्चय S का अभिलाम्बिकीकरण कीजिए–

$$S = \{(1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1)\}$$

Orthogonalize following linearly independent set S of $V_4(R)$:

$$S = \{(1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 1)\}$$